Corrigé du TD n° 4 : Approximation numérique des solutions d'équations

Exercice 1

1) Le point a est un point attractif pour φ si $|\varphi'(a)| < 1$. Mais

$$\varphi'(a) = 1 - cf'(a) \Longrightarrow 1 - cM_1 \leq \varphi'(a) \leq 1 - cm_1 \Longrightarrow |\varphi'(a)| \leq \max\{|1 - cM_1|, |1 - cm_1|\}.$$

La valeur optimale de c est celle qui minimise $|\varphi'(a)|$ (de façon à ce que le point soit le plus attractif possible). Or, il suffit de représenter les graphes des fonctions $c \mapsto |1 - cm_1|$ et $c \mapsto |1 - cM_1|$ pour se convaincre que la plus petite valeur possible pour $\max\{|1 - cM_1|, |1 - cm_1|\}$ est atteinte lorsque $|1 - cM_1| = |1 - cm_1|$, c'est-à-dire $c = \frac{2}{M_1+m_1}$. Il s'ensuit que

$$|\varphi'(a)| \leq \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1} < 1,$$

et le point a est bien attractif.

2) Il suffit de prendre $f(x) = x^2 - a$ et $1 < \sqrt{a} = x < a$. Comme $f'(x) = 2x$, on a $m_1 = 2, M_1 = 2a$, donc $c = 1/(a+1)$. Par conséquent, la suite itérée sera construite en utilisant l'application :

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{a+1}(x^2 - a).$$

Il est intéressant de comparer la convergence de la suite itérée ainsi obtenue avec celle fournie par la méthode de Newton :

$$\varphi_N(x) = x - \frac{1}{2x}(x^2 - a).$$

Considérons, par exemple $a = 2$:

	$x_{n+1} = \varphi(x_n)$	$x_{n+1} = \varphi_N(x_n)$
x_0	1	1
x_1	1.333333333	1.5
x_2	1.407407407	1.416666666
x_3	1.413808870	1.4142156862
x_4	1.414190363	1.4142135623

Après 4 itérations, nous obtenons avec la première méthode 3 décimales exactes (convergence linéaire : on gagne environ une décimale par itération), pendant que la méthode de Newton fournit 11 décimales exactes (convergence quadratique : on double environ le nombre de décimales exactes à chaque itération).

3) On résout l'équation $\varphi(x) = x$ pour trouver les points fixes. La nature des points fixes est déterminée en calculant la dérivée de φ. Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) = x^2 \\ \varphi'(x) = 2x \end{array} \right. \Longrightarrow \text{points fixes} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0, \text{ point super-attractif} \\ x_2 = 1, \text{ point répulsif} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \varphi(x) = x^3 \\ \varphi'(x) = 3x^2 \end{cases} \Longrightarrow \text{points fixes} \begin{cases} x_1 = 0, \text{ point super-attractif} \\ x_2 = 1, \text{ point répulsif} \\ x_3 = -1, \text{ point répulsif} \end{cases}$$

4) Si $\varphi'(x_0) = 1$, le graphe de $\varphi(x)$ et celui de la première bissectrice sont tangents au point x_0. De plus, comme $\varphi''(x_0) > 0$, la fonction φ est convexe sur un voisinage de x_0, donc située au-dessus de la bissectrice. Graphiquement, il est facile de voir que la suite itérée s'éloigne de x_0 si le point de départ est situé à droite de x_0 et s'approche de x_0 si le point de départ est situé à gauche.

On peut justifier cette observation qualitative à l'aide d'un développement de Taylor dans un voisinage de x_0 sur lequel $\varphi'' > 0$:

$$\varphi(x_o + h) = \varphi(x_o) + h\varphi'(x_0) + \varphi''(\xi)h^2/2 = x_o + h + \varphi''(\xi)h^2/2 > x_0 + h$$

Alors, si $h > 0$, on a $x_0 < x_1 = x_o + h < x_2 = \varphi(x_o + h)$, donc les points x_k sont (strictement) repoussés, et si $h < 0$ on a un effet contraire $x_1 = x_o + h < x_2 = \varphi(x_o + h) < \ldots < x_0$. Dans ce dernier cas, on a utilisé l'inégalité $\varphi(x_0 + h) < x_0$ qui est vraie dès lors que $1 + \varphi''(\xi)h/2 > 0$ (puisque $\varphi(x_o + h) = x_0 + h(1 + \varphi''(\xi)h/2)$) ; il suffit pour cela de se placer sur un intervalle suffisamment petit.

Exercice 2

1) Méthode de Newton : comme f' est continue, on se place dans un voisinage de a pour lequel $f'(x) \neq 0$. Le développement de Taylor au voisinage de a s'écrit :

$$0 = f(a) = f(x_n) + (a - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(a - x_n)^2 f''(\xi_n),\ \xi_n \in]\min(a, x_n), \max(a, x_n)[,$$

d'où

$$h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -\varepsilon_n + \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}.$$

Comme $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h_n$, on obtient

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \Longrightarrow \left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2}\right| \to \frac{1}{2}\left|\frac{f''(a)}{f'(a)}\right|, \text{ pour } n \to \infty\ (x_n \to a, \xi_n \to a),$$

donc la convergence de la méthode est quadratique.

2) Méthode de Steffensen : on note $\beta_n = f(x_n)$. Le développement de Taylor

$$g(x_n) = \frac{f(x_n + \beta_n) - f(x_n)}{\beta_n} = f'(x_n) + \frac{1}{2}\beta_n f''(x_n) + o(\beta_n^2)$$

et la notation introduite pour la méthode de Newton $h_n = -f(x_n)/f'(x_n) = -\beta_n/f'(x_n)$ nous permettent d'écrire :

$$g(x_n) = f'(x_n)\left(1 - \frac{1}{2}h_n f''(x_n)\right) + o(\beta_n^2) \Longrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(1 + \frac{1}{2}h_n f''(x_n) + o(\beta_n^2)\right),$$

d'où

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h_n\left(1 + \frac{1}{2}h_n f''(x_n) + o(\beta_n^2)\right) = \varepsilon_n + h_n + \frac{1}{2}h_n^2 f''(x_n) + o(h_n \cdot \beta_n^2).$$

Or, on a vu à la question précédente que

$$h_n = -\varepsilon_n + \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)},$$

donc, pour cette méthode :

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} + \left[-\varepsilon_n + \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}\right]^2 f''(x_n) + o(h_n \cdot \beta_n^2)$$

et, finalement

$$\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2}\right| \to \left|\frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)} + \frac{1}{2}f''(a)\right| =, \; \frac{1}{2}\left|\frac{f''(a)}{f'(a)}(1+f'(a))\right|$$

pour $\quad n \to \infty\, (x_n \to a, \xi_n \to a, \beta_n = f(x_n) \to 0)$.

Par conséquent, la convergence de la méthode de Steffensen est quadratique, similaire à celle de la méthode de Newton. L'avantage de cette méthode est d'éviter le calcul des dérivées de la fonction f.

NB Par un procédé similaire, on peut démontrer que la méthode étudiée à l'exercice 1 a une convergence linéaire ($p = 1$), ce qui justifie l'observation faite au 4) de ce même exercice.

Exercice 3

1) On a $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{F(x_n)-\alpha}{x_n-\alpha} = \frac{F(x_n)-F(\alpha)}{x_n-\alpha}$ en utilisant le fait que $F(\alpha) = \alpha$. Comme, par hypothèse, la suite (x_n) converge vers α on en déduit que $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = F'(\alpha)$.

2) Observons d'abord que $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n$ et $x_{n+1} - x_n = e_{n+1} - e_n$. On en déduit que

$$\bar{x}_n - \alpha = x_n - \alpha - \frac{(e_{n+1}-e_n)^2}{e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n} = e_n - \frac{(e_{n+1}-e_n)^2}{e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n} = \frac{e_{n+2}e_n - e_{n+1}^2}{e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n}.$$

On remarque ensuite que, par définition, $e_{n+1} = (L + \epsilon_n)e_n$ où $L = F'(\alpha)$. Donc $e_{n+2} = (L + \epsilon_{n+1})e_{n+1} = (L + \epsilon_{n+1})(L + \epsilon_n)e_n$. Par suite

$$\bar{x}_n - \alpha = \frac{(L+\epsilon_{n+1})(L+\epsilon_n)e_n^2 - (L+\epsilon_n)^2 e_n^2}{(L+\epsilon_{n+1})(L+\epsilon_n)e_n - 2(L+\epsilon_n)e_n + e_n} = e_n \frac{L(\epsilon_{n+1}-\epsilon_n) + \epsilon_n\epsilon_{n+1} - \epsilon_n^2}{(L+\epsilon_{n+1})(L+\epsilon_n) - 2(L+\epsilon_n) + 1},$$

et on en déduit immédiatement que $\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{x}_n-\alpha}{x_n-\alpha} = 0$ puisque $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ et $L^2 - 2L + 1 \neq 0$ car, par hypothèse, $||F'||_\infty < 1$ donc en particulier $L = F'(\alpha) \neq 1$. Ceci montre que la suite $(\bar{x}_n)$ des approximations d'Aitken converge plus vite vers α que la suite (x_n).

3)(a) Remarquons d'abord que $f'(x) = 3x^2 - 3$ donc $f'(1) = 0$. Par conséquent la fonction $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ *n'est pas définie* en 1. On peut cependant remarquer pour pour tout $x \neq -1, 1$ on a

$$\varphi(x) = x - \frac{(x-1)^2(x+2)}{3(x^2-1)} = x - \frac{(x-1)(x-2)}{3(x+1)}$$

La fonction $\psi(x) = x - \frac{(x-1)(x+2)}{3(x+1)}$ est de classe C^1 au voisinage de 1, $\psi(1) = 1$ et $\psi'(x) = -\frac{x^2+2x}{3(x+1)^2}$ donc $\psi'(1) = 1/4$. Ceci montre que la suite itérée $x_{n+1} = \psi(x_n)$ converge bien vers 1 mais de façon linéaire et non pas quadratique puisque $\psi'(1) \neq 0$. Comme ψ coïncide avec le prolongement par continuité en 1 de la fonction de Newton φ, on en déduit la convergence linéaire et non pas quadratique de la méthode de Newton. Ceci est dû au fait que $f'(1) = 0$ donc les théorèmes usuels sur la méthode de Newton ne s'appliquent pas.

(b) Nous allons voir que la méthode d'Aitken d'accélération de convergence permet ici de gagner un peu par rapport à la méthode de Newton (cf. aussi le devoir 3 pour une méthode plus adaptée au cas des racines multiples). Posons $\bar{e}_n = \bar{x}_n - \alpha$. Comme on l'a vu

$$\bar{e}_n = e_n \frac{L(\epsilon_{n+1}-\epsilon_n) + \epsilon_n\epsilon_{n+1} - \epsilon_n^2}{(L+\epsilon_{n+1})(L+\epsilon_n) - 2(L+\epsilon_n) + 1},$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{e}_{n+1}}{\bar{e}_n} &= \frac{e_{n+1}}{e_n} \cdot \frac{L(\epsilon_{n+2}-\epsilon_{n+1}) + \epsilon_{n+1}\epsilon_{n+2} - \epsilon_{n+1}^2}{L(\epsilon_{n+1}-\epsilon_n) + \epsilon_n\epsilon_{n+1} - \epsilon_n^2} \cdot \frac{(L+\epsilon_{n+1})(L+\epsilon_n) - 2(L+\epsilon_n)+1}{(L+\epsilon_{n+2})(L+\epsilon_{n+1}) - 2(L+\epsilon_{n+1})+1} \\
&= \frac{e_{n+1}}{e_n} \cdot \frac{(\epsilon_{n+2}-\epsilon_{n+1})(L+\epsilon_{n+1})}{(\epsilon_{n+1}-\epsilon_n)(L+\epsilon_n)} \cdot \frac{(L+\epsilon_{n+1})(L+\epsilon_n) - 2(L+\epsilon_n)+1}{(L+\epsilon_{n+2})(L+\epsilon_{n+1}) - 2(L+\epsilon_{n+1})+1}.
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que $\epsilon_{n+1} - \epsilon_n = \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - \frac{e_{n+1}}{e_n}$. Or $e_{n+2} = x_{n+2} - \alpha = \psi(x_{n+1}) - \psi(\alpha) = (x_{n+1}-\alpha)\psi'(\alpha) + \frac{(x_{n+1}-\alpha)^2}{2}\psi''(\alpha) + O((x_{n+1}-\alpha)^3)$. On en déduit que $\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} = \psi'(\alpha) + \frac{e_{n+1}}{2}\psi''(\alpha) + O(e_{n+1}^2)$. Comme $\psi''(\alpha) = \psi''(1) = -5/24$ on a finalement

$$\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - \frac{e_{n+1}}{e_n} \sim -5(e_{n+1}-e_n)/48 = -\frac{5}{48}(L+\epsilon_n-1)e_n$$

De même on montre que

$$\epsilon_{n+2} - \epsilon_{n+1} \sim -\frac{5}{48}(L+\epsilon_{n+1}-1)e_{n+1}$$

et on a finalement

$$\frac{\bar{e}_{n+1}}{\bar{e}_n} \sim \left(\frac{e_{n+1}}{e_n}\right)^2 \cdot \frac{L+\epsilon_{n+1}-1}{L+\epsilon_n-1} \cdot \frac{L+\epsilon_{n+1}}{L+\epsilon_n} \cdot \frac{(L+\epsilon_{n+1})(L+\epsilon_n) - 2(L+\epsilon_n)+1}{(L+\epsilon_{n+2})(L+\epsilon_{n+1}) - 2(L+\epsilon_{n+1})+1}.$$

Ceci montre que $\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{e}_{n+1}}{\bar{e}_n} = L^2 = \frac{1}{16}$. Par conséquent, alors que les approximations successives (x_n) permettent de gagner *grosso modo* une décimale après 2 itérations (puisque $L = \frac{1}{4}$), les approximations d'Aitken offrent le même gain en une seule itération.

Exercice 4

1) Supposons que J admette une racine carrée $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors, $B^2 = J$ implique que $a^2 + bc = 0$, $(a+d)b = 1$, $(a+d)c = 0$ et $cb + d^2 = 0$. Mais comme $(a+d)c = 0$ on a nécessairement $a + d = 0$ ou $c = 0$.

Si $c = 0$ alors $cb + d^2 = 0$ implique que $d = 0$ et $a^2 + bc = 0$ implique que $a = 0$. C'est évidemment incompatible avec $(a+d)b = 1$. Si on suppose maintenant que $a + d = 0$, c'est à nouveau incompatible avec $(a+b)d = 1$. On en déduit que J n'admet pas de racine carrée.

2) Le cas de la matrice K est différent puisqu'on peut facilement construire explicitement une infinité de racines carrées, par exemple toutes les matrices $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3) On a $F(X+H) - F(X) = (X+H)^2 - X^2 = X^2 + HX + XH + H^2 - X^2 = HX + XH + H^2$. La différentielle de F en X est donc l'application linéaire $D_X F :\ H \mapsto XH + HX$.

4) L'algorithme de Newton s'écrit de la façon suivante : on choisit X_0 dans un voisinage de la racine de A où la différentielle de F est un isomorphisme et on utilise la récurrence

$$X_{n+1} = X_n - (D_{X_n}F)^{-1}(X_n^2 - A)$$

La question n'était pas posée car elle est difficile mais on peut montrer que la méthode de Newton est bien définie et converge quadratiquement lorsque l'on suppose que A est symmétrique, définie positive et que l'on part de $X_0 = A$. Dans ce cas on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n commute avec A et est inversible et l'on peut alors réécrire le schéma de Newton sous la forme

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}(X_n + X_n^{-1}A)$$

Exercice 5

1) Pour déterminer les points fixes, on résout le système $\phi(x, y) = 0$

$$\begin{cases} -x + \dfrac{3}{2}y + \dfrac{5}{4} = x \\ -\dfrac{1}{2}x + y^2 + \dfrac{3}{4} = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{4}y \\ y^2 - \dfrac{11}{8}y + \dfrac{7}{16} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2}, \quad x_1 = 1 \\ y_2 = \dfrac{7}{8}, \quad x_2 = \dfrac{41}{32} \end{cases}$$

2) Par théorème, un point fixe a de ϕ est attractif si $\rho(\phi'(a)) < 1$, où ρ est le rayon spectral (le maximum des valeurs absolues des valeurs propres).
On calcule la matrice jacobienne de ϕ :

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{d\phi_1}{dx} & \dfrac{d\phi_1}{dy} \\ \dfrac{d\phi_2}{dx} & \dfrac{d\phi_2}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & 2y \end{pmatrix}$$

Pour $y_1 = 1/2$ on obtient

$$J = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1^A = \dfrac{1}{2} \\ \lambda_2^A = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \rho(J) = \dfrac{1}{2} < 1,$$

et ce point fixe est attractif.
Pour $y_1 = 7/8$ on obtient

$$J = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{7}{4} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1^B = \dfrac{3}{8} + \dfrac{\sqrt{73}}{8} \\ \lambda_2^B = \dfrac{3}{8} - \dfrac{\sqrt{73}}{8} \end{cases} \Longrightarrow \rho(J) = \dfrac{3}{8} + \dfrac{\sqrt{73}}{8} = 1.443 > 1,$$

et ce point fixe n'est pas attractif.

3) Comme la matrice jacobienne est inversible en B$(x_2 = 41/32, y_2 = 7/8)$, on en déduit par le théorème d'inversion locale que ϕ est localement inversible au voisinage de B. De plus :

$$(\phi^{-1} \circ \phi)'(x_2, y_2) = (id)'(x_2, y_2) \Longrightarrow \phi'(x_2, y_2)(\phi^{-1})'(\underbrace{\phi(x_2, y_2)}_{=(x_2,y_2)}) = I$$

donc la matrice jacobienne de ϕ^{-1} est l'inverse de la matrice jacobienne de ϕ. Or les valeurs propres de $(\phi'(x_2, y_2))^{-1}$ sont les inverses des valeurs propres de $\phi'(x_2, y_2)$. Comme $|1/\lambda_2^B| = \lambda_1^B > 1$, on en conclut que le point B n'est pas non plus attractif pour ϕ^{-1}.

Rappelons qu'en dimension 1, un point répulsif pour l'application ϕ est attractif pour son inverse local ! !

Le phénomène observé ici vient du fait que ϕ est attractif dans une direction propre mais répulsif dans l'autre, et que c'est exactement le contraire pour ϕ^{-1}. Dans les deux cas, il y a donc une direction pour laquelle le point est répulsif, ce qui explique le résultat.