UNIVERSITÉ PARIS 6 **LM366. 2007-2008**

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

Corrigé du partiel du 17 Avril 2008

Exercice 1.
1) Soit f une fonction entière bornée ; $M := ||f||_{\mathbb{C}}$ est fini. On sait que f est la somme sur $\mathbb{C}$ d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Pour tout $r > 0$, on peut écrire

$$t \in \mathbb{R}, \qquad f(r\mathrm{e}^{it}) = \sum_{n\geq 0} a_n r^n \mathrm{e}^{int},$$

avec convergence normale en $t \in \mathbb{R}$. On multiple les deux membres par e^{-ipt} et on intègre sur $[0, 2\pi]$. On obtient, pour tout entier $p \geq 0$:

$$a_p r^p = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-ipt}\, dt,$$

donc $|a_p| \leq M/r^p$. Quand $r \to +\infty$, on obtient $a_p = 0$ pour tout $p > 0$. Ainsi $f(z) \equiv a_0$ est constante. C'est le théorème de Liouville.

2) Si l'image de $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$, il existe $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tel que $D(a, r)$ ne rencontre pas $f(\mathbb{C})$. Autrement dit, $|f(z)-a| \geq r$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Il en résulte que $g(z) = 1/(f(z) - a)$ définit une fonction entière bornée, donc constante ; f aussi est constante. On conclut que l'image d'une fonction entière non constante est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2. Pour tout $r > 1$, on pose $I(r) = \int_{\gamma_r} \mathrm{e}^{iz}/(1+z^2)\, dz$, où γ_r est le lacet obtenu en juxtaposant le segment orienté $[-r, r]$ et le demi-cercle $[0, \pi] \ni t \mapsto c_r(t) = r\mathrm{e}^{it}$.

1) La fonction $f(z) = \mathrm{e}^{iz}/(1 + z^2)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$. Ses pôles sont i et $-i$ et le résidu de f en i est $\mathrm{e}^{i^2}/(2i) = 1/(2i\mathrm{e})$. Comme l'indice de γ_r par rapport à $-i$ (resp. i) est nul (resp. $= 1$ car $r > 1$), le théorème des résidus donne $I(r) = 2i\pi \operatorname{res}(f, i) = \pi/\mathrm{e}$.

2) Si $r > 1$ et $t \in [0, \pi]$, $|f(r\mathrm{e}^{it})| \leq \mathrm{e}^{-r\sin t}/(r^2 - 1) \leq 1/(r^2 - 1)$. On en déduit que l'intégrale de Cauchy de f sur le demi-cercle c_r est majorée en module par $\pi r/(r^2 - 1)$, donc :

$$\int_{\gamma_r} f(z)\, dz = \int_{-r}^{r} f(x)\, dx + \int_{c_r} f(z)\, dz = \int_{-r}^{r} f(x)\, dx + O(1/r).$$

Quand $r \to +\infty$, on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \pi/e$ et, en prenant les parties réelles des deux membres :

$$\int_0^{+\infty} (\cos x)/(1+x^2)\,dx = (1/2)\int_{-\infty}^{+\infty} (\cos x)/(1+x^2)\,dx = \pi/(2\mathrm{e}).$$

Exercice 3 À tout $z \in \mathbb{C}$, on associe l'intégrale généralisée

$$(1) \qquad h(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{tz}\, t^{-t}\,dt.$$

1) La fonction $f(t,z) := \mathrm{e}^{tz}\,t^{-t} = \mathrm{e}^{t(z-\mathrm{Log}\,t)}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[\times\mathbb{C}$, holomorphe par rapport à z.
Si $|z| \leq R$, $|f(t,z)| \leq \mathrm{e}^{t(R-\mathrm{Log}\,t)}$, fonction intégrable sur $]0,+\infty[$; (elle est continue, tend vers 0 quand $t \to 0+$ et est majorée par e^{-t} si t est assez grand).
La « domination locale » étant vérifiée, par théorème, l'intégrale (1) est (absolument) convergente et définit une fonction $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(t,\overline{z}) = \overline{f(t,z)}$ si $t \in \mathbb{R}$, donc $h(\overline{z}) = \overline{h(z)}$.
2) La fonction $f(w,z) := \mathrm{e}^{w\,z}w^{-w}$ est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$. Elle est holomorphe en z.
Si $r > 0$ on note c_r le chemin défini par $c_r(t) = r\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0,\pi/2]$. Soit $0 < \epsilon < r$. Soit $\gamma_{\epsilon,r}$ le lacet obtenu en juxtaposant le segment $[\epsilon,r]$, l'arc c_r, l'opposé du segment $[i\epsilon,ir]$ et l'opposé de l'arc c_ϵ.
a) L'ouvert convexe $\Omega := \{x+iy,\ \ y > x\}$ contient l'image du lacet $\gamma_{\epsilon,r}$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $w \mapsto f(w,z)$ est holomorphe sur Ω.
b) Le théorème de Cauchy donne alors $\int_{\gamma_{\epsilon,r}} f(w)\,dw = 0$.
c) Soit $z = x+iy$. Si $\rho > 0$ et $\theta \in [0,\pi/2]$, $\mathrm{Log}\,(\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}) = \mathrm{Log}\,\rho + i\theta$, donc :

$$|f(\rho\,\mathrm{e}^{i\theta},z)| = |\exp(\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}(z - \mathrm{Log}\,\rho\,\mathrm{e}^{i\theta})| = \mathrm{e}^{\rho\cos\theta(x-\mathrm{Log}\,\rho)}\mathrm{e}^{-\rho\sin\theta(y-\theta)}.$$

d) Comme $\int_{\gamma_{\epsilon,r}} = \int_{[\epsilon,r]} + \int_{c_r} - \int_{[i\epsilon,ir]} - \int_{c_\epsilon}$, on a :

$$\int_{[\epsilon,r]} f(w,z)\,dw + \int_{c_r} f(w,z)\,dw = \int_{[i\epsilon,ir]} f(w,z)\,dw + \int_{c_\epsilon} f(w,z)\,dw.$$

On va montrer que, si $y > \pi/2$, les seconds termes des deux membres $\to 0$ quand $r \to +\infty$ (resp. $\epsilon \to 0+$). On conclut alors que

$$|\mathrm{Im}\,z| > \pi/2 \quad\Rightarrow\quad h(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{isz}\,(is)^{-is}\,ids.$$

(La convergence du second membre fait partie de la conclusion.)

Erreur de texte : le i du second membre était absent dans l'énoncé.
Si $w = \epsilon e^{i\theta}$ appartient à l'image du chemin c_ϵ, $|f(w,z)| \le e^{\epsilon|z| - Log\epsilon} \le 1$ si $\epsilon > 0$ est assez petit. Comme la longueur de c_ϵ tend vers 0 avec ϵ, on a bien $\int_{c_\epsilon} f(w,z)\,dw \xrightarrow[\epsilon\to 0+]{} 0$.
On suppose $y > \pi/2$ et on écrit $y = \pi/2 + \eta$ avec $\eta > 0$. Pour tout $r > 0$ assez grand, on a $\mathrm{Log}\, r \ge x + \eta$ et l'égalité de la question précédente donne, si $w = re^{i\theta}$ appartient à l'image du chemin c_r :

$$|f(w,z)| \le e^{-\eta r(\cos\theta + \sin\theta)} \le e^{-\eta r}.$$

On a bien $\int_{c_r} f(w,z)\,dw \xrightarrow[r\to +\infty]{} 0$.
3) Comme $|e^{isz}\,(is)^{-is}| = e^{-s(y-\pi/2)}$ pour tout $s > 0$,

$$|h(x+iy)| \le \int_0^{+\infty} e^{-s(|y|-\pi/2)}\,ds = 1/(|y| - \pi/2),$$

si $y > \pi/2$. Comme $|h(x-iy)| = |h(x+iy)|$, on obtient

$$|\mathrm{Im}\, z| > \pi/2 \ \Rightarrow\ |h(z)| \le 1/(|\mathrm{Im}\, z| - \pi/2).$$

Soit $B := \{x + iy \in \mathbb{C}\,,\ |y| \le \pi\}$. On a en particulier

$$\forall z \notin B, \qquad |h(z)| \le 2/\pi.$$

4) Soit $A := 2i\pi$ et D une droite qui passe par A. Si D est parallèle à $\mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{C}\backslash B$, donc $|h| \le 2/\pi$ sur D. Dans le cas contraire, $D \cap B$ est un segment, donc un compact, et h est bornée sur ce segment et aussi sur $D\backslash B$, donc h est bornée sur la droite D.
Par translation, on voit que la fonction entière $g(z) := h(z - 2i\pi)$ est bornée sur tout droite qui passe par 0. Elle n'est pas bornée sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $\Omega := \{x + iy \in \mathbb{C}\,,\ \ a < x < b\}$ et $\overline{\Omega}$ l'adhérence de Ω dans $\mathbb{C}$.
Remarque : Si $C > 0$, la fonction $C^z = \exp(z\mathrm{Log}\, C)$ est une fonction entière et $|C^{x+iy}| = C^x$.
1) Si $A > 0$, $B > 0$, $g(z) = A^{(b-z)/(b-a)}\,B^{(z-a)/(b-a)}$ est une fonction entière et

$$|g(x+iy)| = A^{(b-x)/(b-a)}\,B^{(x-a)/(b-a)}.$$

2) Soit f une fonction continue et bornée sur $\overline{\Omega}$, holomorphe sur Ω. On note $M := ||f||_{\overline{\Omega}}$ et

$$a \le x \le b, \qquad M(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(x+iy)|.$$

On suppose $M(a) > 0$, $M(b) > 0$ et on choisit $A = M(a)$ et $B = M(b)$. Comme $|g(x+iy)| = A^{(b-x)/(b-a)}\, B^{(x-a)/(b-a)} \geq \min(A,B) > 0$, g ne s'annule pas sur $\overline{\Omega}$. La fonction $h = f/g$ est donc (définie et) continue sur $\overline{\Omega}$, holomorphe sur Ω. Elle est bornée : $|h(z)| \leq N := M/\min(A,B)$ pour tout $z \in \overline{\Omega}$.
On a $|f(a+iy)| \leq M(a)$ et $|g(x+iy) = M(a)$, donc $|h(a+iy)| \leq 1$.
De même, $|h(b+iy)| \leq 1$.
3) Si $\epsilon > 0$, posons :

$$w \in \overline{\Omega}, \qquad h_\epsilon(w) = h(w)/(1+\epsilon(w-a)).$$

Si $w = u+iv$, on a $|h_\epsilon(u+iv)| = |h(u+iv)/|(1+\epsilon(u-a))+iv)$. On a donc les inégalités :

$$|h(a+iv)| \leq 1, \qquad |h(b+iv)| \leq 1, \qquad |h(u+iv)| \leq N/|v|.$$

Soit $z = x+iy \in \overline{\Omega}$ fixé. À tout $Y > |y|$, on associe le rectangle plein $K(Y)$ de sommets les points $a-iY$, $b-iY$, $b+iY$ et $a+iY$. On note $\partial K(Y)$ la frontière de $K(Y)$ dans $\mathbb{C}$.
Sur $\partial K(Y)$, $|h_\epsilon|$ est majoré par $\max(1, N/Y)$, donc par 1 si Y est choisi assez grand. Le principe du maximum donne alors $|h(z)| \leq 1$.
On conclut que $|h(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \overline{\Omega}$. :
4) Conclusion :

$$x \in [a,b], \qquad M(x) \leq A^{(b-x)/(b-a)}\, B^{(x-a)/(b-a)}.$$