

Université Paris 6– Licence de Mathématiques- Module LM346–
Corrigé de l'examen du 5 juin 2007

Durée 2h.

Exercice 1

1) 1.a) C'est du cours : si $(U_k)_{k \geq 1}$ on sait que la suite de v.a. $Y_k = -\log(1-U_k)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

1.b) On pose $\Sigma_n = \mathbf{1}_{[0,1/2]} \circ U_k$.

2) Soit W_k une suite de v.a. i.i.d. suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ et posons $U_k = W_{3k-2}$, $\Sigma_k = W_{3k-1}$, $V_k = W_{3k}$. Chacune des suites V_k , U_k est i.i.d et suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ et la suite $U_1, \Sigma_1, V_1, \dots, U_n, \Sigma_n, V_n, \dots$ est indépendante. Si on note $f(x) = -\log(x)$, on sait alors d'après un théorème du cours que la suite $f(U_1), \Sigma_1, V_1, \dots, f(U_n), \Sigma_n, V_n, \dots$ est indépendante, ce qui est ce que l'on voulait démontrer.

3) 3.a) Puisque les v.a V_k et Y_k sont indépendantes (V_k, Y_k) admet pour densité $\mathbf{1}_{[0,1]}(v)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)e^{-y}$.

3.b) Si on note $E = \{(v, y) \in [0, 1] \times [0, \infty) : v \leq e^{-(y-1)^2/2}\}$ on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_k) &= \int_E e^{-y} dv dy \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^{\exp(-(y-1)^2/2)} 1 dv \right) e^{-y} dy \\ &= \int_0^\infty e^{-(y-1)^2/2} e^{-y} dy \\ &= (e/2)\sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

De même, si on note $E_I = \{(v, y) \in [0, 1] \times I : v \leq e^{-(y-1)^2/2}\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_k, Y_k \in I) &= \int_{E_I} e^{-y} dv dy \\ &= \int_{I \cap [0, \infty)} \left(\int_0^{\exp(-(y-1)^2/2)} 1 dv \right) e^{-y} dy \\ &= \int_{I \cap [0, \infty)} e^{-(y-1)^2/2} e^{-y} dy \\ &= e \int_{I \cap [0, \infty)} e^{-y^2/2} dy \\ &= e \int_{I \cap [0, \infty)} e^{-y^2/2} dy \end{aligned}$$

3.c) Il est facile de voir que ν_1 est une v.a (cf. cours). On a $\mathbf{P}(\nu_1 = n) = \mathbf{P}(B_n) = (1 - \mathbf{P}(A_1))^{n-1} \mathbf{P}(A_1)$ puisque les événements A_i sont indépendants. La v.a ν_1 suit donc une loi géométrique de paramètre $\alpha = e^{-\sqrt{\pi}/2}$.

3.d) Soit $I = (a, b)$ un intervalle. Calculons $\mathbf{P}(X_1 \in I)$. Introduisons pour cela l'événement $A_k = \{Y_1 \notin I, \dots, Y_{k-1} \notin I, Y_k \in I\}$ et écrivons

$$\mathbf{P}(X_1 \in I) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 \in I, \nu_1 = n) \quad (1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_n(I)) \quad (2)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha)^{n-1} e \int_{I \cap [0, \infty)} e^{-y^2/2} dy \quad (3)$$

$$= \frac{1}{\alpha} e \int_{I \cap [0, \infty)} e^{-y^2/2} dy \quad (4)$$

$$= \int_I \mathbf{1}_{(0, \infty)} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{\pi/2}} dy \quad (5)$$

Ceci démontre l'assertion relative à X_1 . Des calculs précédents, il est clair que X_1 et Σ_1 sont indépendantes et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_1 \in I) &= \mathbf{P}(X_1 \in I \cup -I) \\ &= (1/2)\mathbf{P}(X_1 \in I) + (1/2)\mathbf{P}(X_1 \in -I) \\ &= (1/2) \int_I \mathbf{1}_{(0, \infty)} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{\pi/2}} dy + (1/2) \int_{-I} \mathbf{1}_{(0, \infty)} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{\pi/2}} dy \\ &= \int_I \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \end{aligned}$$

ce qui démontre que Z_1 suit une loi normale centrée réduite.

4) On procède comme dans le cours : on pose

$$\nu_r := \inf\{k \geq 1 + \nu_{r-1} : V_k \leq \exp(-(Y_k - 1)^2/2)\}, \quad X_r = Y_{\nu_r}, \quad Z_r = \Sigma_r \cdot X_r.$$

Exercice 2 D'après la loi des grands nombres et la formule de transfert, si U suit une loi uniforme sur $[0, \pi]$ ($f = \sin(\cos x)$) $S_n/n = (1/n)(f(U_1) + \dots + f(U_n))$ converge p.s vers $\mathbf{E}(f(U)) = (1/\pi) \int_0^\pi f(U) du = (1/\pi)I(f)$. D'après le TCL, si on pose $\sigma^2 = \mathbf{Var}(f(U))$ la v.a. $(\sqrt{n}/\sigma)(S_n/n - (I(f)/\pi))$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite. Notons que $\sigma^2 = (1/\pi) \int_0^\pi f^2(u) du -$

$(I(f)/\pi)^2$. Utilisant le fait que $\sin x \leq 1$ pour $0 \leq x \leq \pi/2$ on trouve $\sigma^2 \leq 1$.
On a donc pour n grand

$$\mathbf{P}(|(S_n/n) - (I(f)/\pi)| \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}) \approx 0.05$$

On trouve n de l'ordre de $\sigma^2 10^4 \leq 10^4$.

Exercice 3

- 1) Il est facile de voir qu'il n'y a qu'une seule classe ; tous les états sont donc récurrents puisque la chaîne est finie.
- 2) Puisque l'état 1 est récurrent, il est vrai qu'avec probabilité 1 la chaîne se trouvera infiniment souvent dans l'état 1.
- 3) Il est facile de voir que tous les coefficients de P^2 sont strictement positifs : la matrice P est apériodique.
- 4) En conséquence, il existe une unique loi stationnaire μ telle que $\mu = \mu P$. On doit avoir

$$\begin{aligned}2\mu_1 &= \mu_1 + \mu_3 \\2\mu_2 &= \mu_1 + \mu_2 \\2\mu_3 &= \mu_2 + \mu_3\end{aligned}$$

On trouve donc $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1/3$.

- 5) D'après le Théorème ergodique A_n/n converge vers $1/3$.
- 6) Il suffit d'introduire une chaîne de Markov dont les états sont ij $i, j \in \{1, 2, 3\}$.